

## ***Knight's Tour: a modelagem de jogos como gerador de materiais composicionais***

MODALIDADE: COMUNICAÇÃO

SUBÁREA: Composição e Sonologia

*Alexandre de Souza Ferreira da Silva Pinto*

Conservatório Brasileiro de Música – alexandre.composer@gmail.com

*Liduíno José Pitombeira de Oliveira*

Universidade Federal do Rio de Janeiro – pitombeira@musica.ufrj.br

**Resumo.** Neste trabalho, apresentamos os procedimentos composicionais utilizados na obra *Knight's tour*, realizada através da Modelagem de Jogos, uma metodologia pré-composicional que articula a Modelagem Sistêmica, a Teoria dos Jogos e a Teoria dos Grafos. A partir da modelagem do jogo homônimo, à qual foi aplicada a série da *Sinfonia*, Op. 21, de Anton Webern, a obra *Knight's Tour* foi elaborada, demonstrando o potencial da Modelagem de Jogos na geração de materiais, os quais foram texturalmente ampliados pelo emprego de formas de harmonizações propostas por Pitombeira (2020).

**Palavras-chave.** Modelagem sistêmica. Modelagem de Jogos. Teoria dos Grafos. Planejamento Composicional.

***Knight's Tour: game modeling as a generator of compositional materials***

**Abstract.** In this work, we present the compositional procedures used in *Knight's Tour*, performed through Game Modeling, a pre-compositional methodology that articulates Systemic Modeling, Game Theory, and Graph Theory. From the modeling of the homonymous game, to which the series of Anton Webern's *Symphony*, Op. 21, was applied, *Knight's Tour* was elaborated, demonstrating the potential of Game Modeling in the generation of materials, which were texturally expanded by use of the forms of harmonization proposed by Pitombeira (2020).

**Keywords.** Systemic Modeling. Game Modeling. Graph Theory. Compositional Planning.

### **1. Introdução**

Este trabalho visa apresentar o processo composicional da obra *Knight's Tour*, composta para quinteto de sopros, modelada a partir do jogo homônimo. A obra, composta como parte da tese de doutorado de Alexandre Ferreira (2021), parte de uma proposta de modelagem de jogos como gerador de materiais e/ou articulador de estratégias composicionais.

A modelagem de jogos foi criada com o objetivo de contribuir com a ampliação da Modelagem Sistêmica (PITOMBEIRA, 2017), buscando identificar e extrair elementos de um jogo usados posteriormente na composição musical. Para realizar a modelagem de um jogo, é necessário, em primeiro lugar, identificar e definir determinados parâmetros. A partir da primeira etapa, uma análise é realizada, tendo a Teoria dos Jogos<sup>1</sup> e a Teoria dos Grafos<sup>2</sup>

como base. Por fim, uma tabela ou um grafo é gerado, o que configura um modelo sistêmico do jogo examinado.

Nas próximas seções, apresentaremos o jogo utilizado, chamado *Knight's Tour*, sua modelagem, como gerador de materiais, além de sua aplicação composicional. Para a análise do jogo e, conseqüentemente, sua modelagem, foi utilizada a Teoria dos Grafos, ilustrando a resolução do jogo. O material gerado pela modelagem foi complementado pelas possibilidades de harmonização apresentadas por Pitombeira (2020).

## 2. O jogo *Knight's Tour*

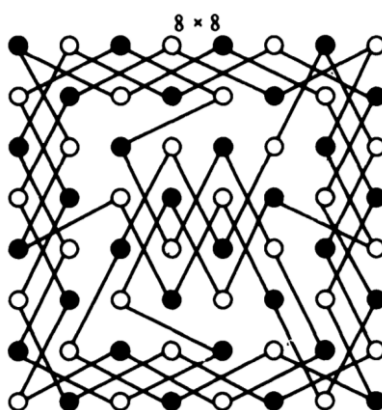
Habitualmente traduzido como *problema do cavalo* ou *passeio do cavalo*, o jogo *knight's tour* é uma variante do jogo do xadrez, onde sua conclusão depende de uma volta completa pelo tabuleiro, utilizando unicamente os movimentos do cavalo, sem repetir nenhuma casa do tabuleiro. Allen Schwenk (1991) explica que a busca por soluções para o jogo é popular nas graduações em matemática, tendo resoluções mais ou menos complexas, dependendo do tamanho do tabuleiro.<sup>3</sup>

Schwenk observa que, geralmente, o problema do cavalo é abordado na forma fechada, do seguinte modo: “Em quais tabuleiros  $m \times n$  um cavalo pode fazer movimentos legais sucessivos, visitar todas as casas exatamente uma vez e concluir retornando à sua casa inicial?” (p.326, tradução nossa)<sup>4</sup>. Para o autor, um tabuleiro de xadrez  $m \times n$  (tendo como padrão 8X8) é uma matriz com casas quadradas dispostas em  $m$  linhas e  $n$  colunas, onde as casas do tabuleiro são marcadas  $(i, j)$  contando a partir do canto superior esquerdo da maneira matricial. Assim, considerando o movimento do cavalo no jogo de xadrez, que é alcançado em movimento de “L”, através de duas casas na horizontal ou na vertical, seguido de uma casa na direção perpendicular, pode-se concluir que existem 8 finalizações possíveis de movimento. Portanto, ao iniciar na casa  $(i, j)$ , temos como possíveis finalizações as casas  $(i \pm 2, j \pm 1)$  ou  $(i \pm 1, j \pm 2)$  ou, de modo que a proximidade com o fim do tabuleiro impossibilite tais movimentos. Vale ressaltar que o movimento do cavalo sempre conecta casas de cores diferentes. Portanto, ao iniciar em uma casa branca, o movimento do cavalo sempre nos leva a uma casa preta e vice-versa.

Existe ainda a forma aberta do problema do cavalo, que, segundo Schwenk, difere da forma fechada unicamente pela não necessidade de retorno à casa inicial dentro do último movimento. Apesar da diferença entre as formas aberta e fechada, o autor sustenta que a resolução de ambos os problemas pode ser feita da mesma forma, sendo a Teoria dos Grafos o

meio para tal resolução. “Definimos um grafo  $G(m, n)$  com vértices  $mn$  substituindo cada casa do tabuleiro por um vértice e juntando dois vértices por uma aresta se eles são separados pelo movimento do cavalo.” (p.326, tradução nossa)<sup>5</sup>. Uma resolução possível apresentada pelo autor para o passeio fechado em um tabuleiro (8x8) pode ser observada na Figura 1.

Um cavalo pode percorrer o tabuleiro  $m \times n$  se e somente se existir um ciclo contendo todos os vértices no grafo resultante. Esse ciclo é chamado ciclo Hamiltoniano [...] A coloração preta e branca alternada, comum no tabuleiro de xadrez, é preservada nos vértices branco e preto do gráfico. Definimos que o vértice  $(i, j)$  seja branco se  $i + j$  for par e preto se  $i + j$  for ímpar. É fácil ver que todas as arestas no grafo estão unidas aos vértices de cores opostas. Esse gráfico é chamado de bipartido ou bigrafo. Como as cores devem alternar em qualquer ciclo, o ciclo deve ter um número par de vértices. Acabamos de provar um dos primeiros teoremas de gráficos bipartidos, ou seja, todos os ciclos devem ser pares. (SCHWENCK, 1991, p.326, tradução nossa)<sup>6</sup>



**Figura 1:** Possível resolução para o problema do cavalo em tabuleiro 8x8 (SCHWENCK, 1991, p.331).

### 3. A obra *Knight's Tour*

Na versão fechada do problema do cavalo, como visto na seção anterior, busca-se percorrer todas as casas do tabuleiro de xadrez, começando e terminando na mesma casa, utilizando apenas o movimento do cavalo. Tal mecânica foi mantida na modelagem do jogo, sendo o tamanho do tabuleiro a única modificação realizada. Ao invés do tabuleiro padrão do xadrez no tamanho 8x8, o problema do cavalo foi realizado em um tabuleiro 12x12, conforme demonstra a Figura 2. Contudo, assim como na versão 8x8, não existe uma única forma de resolver o problema do cavalo.

**A resolução do problema do cavalo no tabuleiro 12x12 foi utilizada como modelo para definição das classes de alturas da obra *Knight's Tour*. Para tal, o modelo de resolução do jogo mapeou a matriz dodecafônica da *Sinfonia, Op.21*, de Anton Webern, que pode ser observada na Figura 3, fazendo com que a obra de Webern servisse de repositório.**

1	70	107	112	5	66	103	116	9	64	99	118
108	111	2	69	104	115	6	65	100	117	10	63
71	106	109	4	113	102	67	8	61	98	119	12
110	3	72	105	68	7	114	101	120	11	62	97
73	142	35	40	77	140	17	60	93	122	13	58
36	39	74	141	32	41	92	121	16	59	96	123
143	34	37	76	139	78	55	18	125	94	57	14
38	75	144	33	42	31	126	91	56	15	124	95
81	136	29	44	79	138	19	54	89	128	21	52
28	45	80	137	30	43	90	127	20	53	88	129
135	82	47	26	133	84	49	24	131	86	51	22
46	27	134	83	48	25	132	85	50	23	130	87

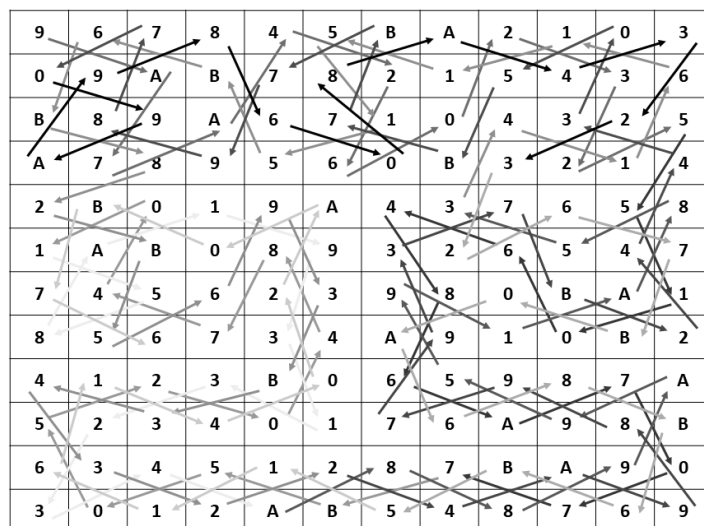
Figura 2: Possível resolução para o problema do cavalo em um tabuleiro 12x12 (KUMAR, 2004).

	I <sub>0</sub>	I <sub>9</sub>	I <sub>10</sub>	I <sub>11</sub>	I <sub>7</sub>	I <sub>8</sub>	I <sub>2</sub>	I <sub>1</sub>	I <sub>5</sub>	I <sub>4</sub>	I <sub>3</sub>	I <sub>6</sub>	
P <sub>0</sub>	9	6	7	8	4	5	B	A	2	1	0	3	R <sub>0</sub>
P <sub>3</sub>	0	9	A	B	7	8	2	1	5	4	3	6	R <sub>3</sub>
P <sub>2</sub>	B	8	9	A	6	7	1	0	4	3	2	5	R <sub>2</sub>
P <sub>1</sub>	A	7	8	9	5	6	0	B	3	2	1	4	R <sub>1</sub>
P <sub>5</sub>	2	B	0	1	9	A	4	3	7	6	5	8	R <sub>5</sub>
P <sub>4</sub>	1	A	B	0	8	9	3	2	6	5	4	7	R <sub>4</sub>
P <sub>10</sub>	7	4	5	6	2	3	9	8	0	B	A	1	R <sub>10</sub>
P <sub>11</sub>	8	5	6	7	3	4	A	9	1	0	B	2	R <sub>11</sub>
P <sub>7</sub>	4	1	2	3	B	0	6	5	9	8	7	A	R <sub>7</sub>
P <sub>8</sub>	5	2	3	4	0	1	7	6	A	9	8	B	R <sub>8</sub>
P <sub>9</sub>	6	3	4	5	1	2	8	7	B	A	9	0	R <sub>9</sub>
P <sub>6</sub>	3	0	1	2	A	B	5	4	8	7	6	9	R <sub>6</sub>
RI <sub>0</sub>	RI <sub>9</sub>	RI <sub>10</sub>	RI <sub>11</sub>	RI <sub>7</sub>	RI <sub>8</sub>	RI <sub>2</sub>	RI <sub>1</sub>	RI <sub>5</sub>	RI <sub>4</sub>	RI <sub>3</sub>	RI <sub>6</sub>		

Figura 3: Matriz dodecafônica da *Sinfonia* Op.21, de Anton Webern.

As classes de alturas foram selecionadas de acordo com os movimentos enumerados na resolução do jogo, conforme demonstra a Figura 4, e agrupadas de modo a formar 12 séries de 12 classes de alturas. Vale ressaltar que, como o parâmetro de escolha das classes de alturas é unicamente o modelo de resolução do jogo, as regras presentes no

universo da composição dodecafônica ortodoxa não se aplicam, uma vez que ocorrerão repetições de classes de alturas.



**Figura 4:** Resolução do passeio do cavalo na matriz do Op.21 de Webern.

Os movimentos do cavalo na matriz de Webern geram uma séria inesperada, onde uma mesma classe de altura pode aparecer mais de uma vez dentro de uma série, por exemplo. Todas as 12 séries geradas pelo modelo de resolução aplicado à matriz de Webern podem ser observadas na Tabela 1.

**Tabela 1:** Séries geradas pelo passeio do cavalo na matriz do Op.21 de Webern.

<b>S1 – 9 A 7 A 4 2 6 0 2 3 2 5</b>	<b>S7 – 2 B 5 6 9 3 B 9 4 3 2 2</b>
<b>S2 – 5 1 0 6 4 8 6 A 7 0 7 7</b>	<b>S8 – 4 A 9 8 9 7 9 3 7 B 2 4</b>
<b>S3 – B 5 0 5 2 0 4 8 7 4 0 1</b>	<b>S9 – 4 3 0 5 B 7 B 7 9 8 7 0</b>
<b>S4 – 5 8 A 1 9 3 1 3 2 3 4 A</b>	<b>S10 – 9 A 9 8 6 0 8 A 4 3 2 3</b>
<b>S5 – 8 8 9 A 9 5 9 1 A 8 5 3</b>	<b>S11 – 2 6 7 B 0 A 6 8 B 6 B 5</b>
<b>S6 – 4 1 6 1 1 5 1 5 B 6 B 8</b>	<b>S12 – 1 1 6 1 4 0 2 A 0 B 7 6</b>

Enquanto as classes de alturas foram geradas a partir do modelo de resolução do problema do cavalo aplicado à matriz dodecafônica da *Sinfonia*, Op.21, de Webern, as durações foram determinadas a partir da serialização rítmica proposta por Milton Babbitt, chamada de “pontos de ataque” (STRAUS, 2013, p.265). Tal técnica baseia-se na divisão exata de um compasso em doze pontos de ataque que se mapeiam diretamente nas classes de alturas. Portanto, a primeira classe de altura encontrada na primeira série é articulada no

décimo ponto de ataque, pois trata-se da classe de nota 9 (vale ressaltar que o primeiro ponto de ataque é considerado o ponto 0). Ainda, cabe salientar que a serialização rítmica não define a duração exata, mas apenas o ponto onde a nota será articulada. Uma vez articulada, essa nota pode ter sua duração estendida, no máximo, até a articulação da próxima nota prevista pelo ponto de ataque. A Figura 5 demonstra como a primeira série da obra se relaciona com a serialização rítmica proposta por Babbitt.



The figure shows a musical score for Flute in 3/4 time. It consists of two systems of music. The first system has three measures. The first measure has an attack point labeled '9 A'. The second measure has an attack point labeled '7 A'. The third measure has an attack point labeled '4'. The second system has four measures. The first measure has attack points labeled '2 6'. The second measure has attack points labeled '0 2 3'. The third measure has attack points labeled '2 5'. The fourth measure has no attack points. Below each measure, there is a rhythmic pattern of notes and a sequence of numbers from 0 to 9, with 'A' and 'B' representing specific notes.

**Figura 5:** Pontos de ataque aplicados à primeira série da obra *Knights Tour*

O acompanhamento harmônico presente na obra foi realizado a partir da proposta de classificação de tipos de harmonização criada por Pitombeira (2020), onde a harmonia de uma obra pode ser classificada como *endógena*, *semi-endógena*, *complementar* e *exógena*. O autor chama de endógena uma harmonia oriunda de materiais internos. Quando os materiais internos são apresentados com variações, a harmonia é dita *semi-endógena*, podendo ser classificada como: 1) incompleta; 2) expandida; 3) incompleta e expandida. Quando os materiais internos são apresentados de forma parcial, a harmonia é classificada como semi-endógena incompleta. Quando existe alguma nota na harmonia que está além dos materiais internos, a harmonia é dita semi-endógena expandida. Por fim, ao combinar as duas possibilidades anteriores, ao mesmo tempo expandindo o material e omitindo algum elemento, temos a harmonia semi-endógena incompleta e expandida. Ao utilizar a harmonia para complementar o material interno com algum conjunto maior de classes de alturas (uma escala octatônica, por exemplo), temos a harmonia complementar. Por fim, quando a harmonia não se conecta com os materiais internos, temos a harmonia exógena.<sup>7</sup>



Musical score for woodwinds (Flute, Oboe, Clarinet in B $\flat$ , Horn in F, Bassoon) in 3/4 time, tempo  $\text{♩} = 80$ . The score is divided into two systems, labeled 1 and 2.

**System 1:**

- Flute:  $f$  (first measure),  $p \triangleleft f$  (second measure),  $mf$  (third measure).
- Oboe:  $f$  (first measure),  $p \triangleleft f$  (second measure),  $pp$  (third measure).
- Clarinet in B $\flat$ :  $f$  (first measure),  $p \triangleleft f$  (second measure),  $pp$  (third measure).
- Horn in F:  $f$  (first measure),  $p \triangleleft f$  (second measure),  $pp$  (third measure).
- Bassoon:  $f$  (first measure),  $p \triangleleft f$  (second measure),  $pp$  (third measure).

Harmonic annotations for System 1:
 

- Harmonia Complementar: Escala Octatônica (under the first two measures).
- Harmonia Complementar: Total Cromático (under the second and third measures).
- Endogenia integral (under the third measure).

**System 2:**

- Fl. (Flute):  $f$  (first measure).
- Ob. (Oboe):  $mf$  (first measure),  $mf$  (second measure),  $dim.$  (third measure),  $pp$  (fourth measure).
- B $\flat$  Cl. (Clarinet in B $\flat$ ):  $mf$  (first measure),  $mf$  (second measure),  $dim.$  (third measure),  $pp$  (fourth measure).
- Hn. (Horn in F):  $mf$  (first measure),  $mf$  (second measure),  $dim.$  (third measure),  $pp$  (fourth measure).
- Bsn. (Bassoon):  $mf$  (first measure).

Harmonic annotations for System 2:
 

- Endogenia Parcial (Semi-Endogenia expandida) (under the first two measures).
- Harmonia Exógena: Linhas divergentes em relação a um eixo (C). (under the third and fourth measures).

**Figura 6:** Exemplos de harmonizações presentes em um trecho da obra *Knight's Tour*, de Alexandre Ferreira

Conforme pode ser observado na Figura 6, as harmonizações realizadas através das técnicas supracitadas foram aplicadas por meio de janelas, constituídas por no mínimo duas e no máximo 6 notas, com o objetivo de gerar diversidade na condução da construção harmônica. A primeira parte destacada da série, por exemplo, foi harmonizada a partir da harmonia complementar, na qual a flauta executa as classes de notas 4 7 9 A e os demais

instrumentos executam as classes de notas 0 1 3 6, gerando, assim, uma escala octatônica (0 1 3 4 6 7 9 A).

#### 4. Considerações finais

Descrevemos, no presente trabalho, que a Modelagem de Jogos, realizada como uma articulação entre a Modelagem Sistêmica, a Teoria dos Jogos e a Teoria dos Grafos, pode ser uma forma eficaz de gerar materiais composicionais. Ainda, vimos a mecânica do jogo *Knight's Tour*, uma variante do jogo de xadrez, e uma possível resolução, feita por Allen Schwenk a partir da Teoria dos Grafos.

Em seguida, a partir de uma resolução do jogo proposta por Kumar em um tabuleiro 12x12, o modelo obtido foi aplicado na matriz dodecafônica da *Sinfonia*, Op. 21, de Anton Webern. O mapeamento entre o modelo do jogo e a matriz de Webern gerou 12 séries de 12 notas, que foram integralmente utilizadas na composição da obra homônima ao jogo. As durações atribuídas às notas foram determinadas a partir da técnica *pontos de ataque*, criada por Milton Babbitt, enquanto o acompanhamento harmônico foi determinado pelas técnicas de harmonização catalogadas por Pitombeira (2020).

Vale ressaltar que a aplicação da Modelagem de Jogos apresentada foi resumida apenas como geradora de materiais composicionais, no caso, apenas das alturas. Contudo, como um modelo abstrato obtido a partir de um jogo, qualquer outro parâmetro poderia ter sido desenvolvido a partir de uma modelagem. Acrescenta-se, ainda, que as estruturas e materiais obtidos a partir da modelagem de jogos permitem ao compositor explorar possibilidades que dificilmente seriam imaginados sem tal abordagem.

#### Referências

BROWN, Ronald. The Knight's Tour Problem as a Conceptual Tool for Interdisciplinary Studies. In: *Bridges: Mathematical Connections in Art, Music, and Science*. Conference Proceedings. Reza Sarhangi, Ed. Maryland: Towson University, 2002, p.169-180.

KUMAR, Awani. *Studies in Magic Tours of Knight on 12x12 Board*. The Games and Puzzles Journal. Disponível em: < <https://www.mayhematics.com/j/gpj32.htm>>. Acesso em 08 de Janeiro de 2020.

PINTO, Alexandre S. F. S. *Modelagem de Jogos: o jogo como gerador de materiais e articulador de estratégias composicionais*. Rio de Janeiro, 2021, 238 f. Tese (Doutorado em Música). Universidade Federal do Rio de Janeiro/PPGM, Rio de Janeiro, 2021.



FIANI, Ronaldo. *Teoria dos Jogos: Com Aplicações em Economia, Administração e Ciências Sociais*. 3. Nova Iorque: Elsevier, 2009. 394 p.

NEUMANN, J. von; MORGENSTERN, O. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944. 674 p.

JURKIEWICZ, S. *Grafos: uma introdução*, 2009. Rio de Janeiro: OBMEP, 2009. Disponível em: < <http://www.obmep.org.br/docs/apostila5.pdf>>. Acesso em 12 de Julho de 2020.

PITOMBEIRA, Liduino. Modelagem sistêmica como metodologia pré-composicional. *Anais do XXVII Congresso da Associação Nacional de Pesquisa e Pós-graduação em Música*. Campinas: UNICAMP, 2017c, p.1-10.

PITOMBEIRA, Liduino. Compositional Systems: Overview and Application. *MusMat*, Rio de Janeiro: PPGM/UFRJ v.4, n.1, jul. 2020, p.39 – 62

SCHWENK, A. J. Which rectangular chessboards have a knight's tour? *Mathematics Magazine*, 64, p.325–332, 1991.

STRAUS, J. *Introdução à Teoria Pós-Tonal*. Ricardo Bordini, trad. Salvador: EDUFBA, 2013. 236 p.

## Notas

---

<sup>1</sup> Embora um dos referenciais clássicos mais importantes da Teoria dos Jogos seja o texto de J. von Neumann e O. Morgenstern (1944), na base teórica da presente pesquisa focalizamos no texto de Fiani (2009).

<sup>2</sup> O referencial para a Teoria dos Grafos utilizado neste artigo é o trabalho de Jurkiewicz (2009).

<sup>3</sup> Outra proposta de utilização artística do problema do cavalo pode ser encontrada em Brown (2020).

<sup>4</sup> *On which  $m \times n$  boards can a knight make successive legal knight moves, visit every cell exactly once, and conclude by returning to its starting cell?*

<sup>5</sup> *We define a graph  $G(m, n)$  on  $mn$  vertices by replacing each cell of the board by a vertex and then joining two vertices by an edge if they are separated by a knight's move.*

<sup>6</sup> *A knight can tour the  $m \times n$  board if and only if there exists a cycle containing all the vertices in the resulting graph. Such a cycle is called a Hamiltonian cycle [...] The customary alternating white and black coloring of the chessboard is preserved in the white and black vertices of the graph. We set vertex  $(i, j)$  to be white if  $i + j$  is even and black if  $i + j$  is odd. It is easy to see that every edge in the graph joins vertices of opposite colors. Such a graph is called bipartite, or for brevity, a bigraph. Since the colors must alternate in any cycle, the cycle must have an even number of vertices. We have just proved one of the first theorems on bipartite graphs, namely, all cycles must be even.*

<sup>7</sup> Os materiais internos aos quais nos referimos podem ser observados na Figura 6 na linha melódica da flauta.